Réduction des matrices orthogonales

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.*

Démonstration.

Soit $x \in F$, alors $u(x) \in F$.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormale de F, que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.
Pour tout i, on note $f_i = u(e_i)$.
Alors $(f_1, \ldots, f_r)$ est une base orthonormale de F, et $(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ est une base orthonormale de $F^\perp$.
Ainsi, si $x = \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i \in F^\perp$, alors, $u(x) = \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i u(e_i) = \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i f_i \in F^\perp$.
$F^\perp$ est donc stable par u. □

Lemme 2. *Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe un sous-espace vectoriel W_n de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim W_n \leqslant 2$ et stable par M.*

Démonstration.

Si M possède une valeur propre réelle λ de vecteur propre associé X, alors $W = Vect(X)$ convient.
En effet, $MX = \lambda X \in W$.

Sinon, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de vecteur propre X : $AX = \lambda X$. Alors $A\overline{X} = \overline{AX} = \overline{\lambda X} = \overline{\lambda X}$.
Comme $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda \neq \overline{\lambda}$, et X et $\overline{X}$ sont linéairement indépendants.
Soit $Y = X + \overline{X} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Comme $A^2Y = \lambda AX + \overline{\lambda} A\overline{X} = (\lambda + \overline{\lambda})(AY) - \lambda\overline{\lambda}(Y) \in Vect(Y, AY)$.
Ainsi,$W = \text{Vect}(Y, AY)$ convient. □

Lemme 3. *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe des sous-espaces vectoriels $W_1, \ldots, W_k$ de $\mathbb{R}^n$ stables par u tels que, pour tout i, $\dim W_i \leqslant 2$, et $E = \mathop{\perp}\limits_{i=1}^{k} W_i$.*

Démonstration.

On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$ ou $n = 2$, on peut prendre $k = 1$ et $W_1 = E$.
Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. Par le lemme 2, il existe W_1 stable par u tel que $\dim W_1 \leqslant 2$.
Alors $V = W_1^\perp$ vérifie $\dim V \leqslant n - 1$, et on applique l'hypothèse de récurrence : il existe des sous-espaces vectoriels $W_2, \ldots, W_k$ de $\mathbb{R}^n$ stables par u tels que, pour tout i, $\dim W_i \leqslant 2$, et $V = \mathop{\perp}\limits_{i=2}^{k} W_i$.
Ainsi, $E = W_1 \perp V = \mathop{\perp}\limits_{i=1}^{k} W_1$, avec $\dim W_i \leqslant 2$ et les W_i stables par u. □

Théorème 4. *Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors M est semblable à :*

$$\begin{pmatrix} I_r & & & & 0 \\ & -I_m & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_i \in]0;2\pi[\setminus \{\pi\} \\ R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Démonstration.

Grâce au lemme 3, on a des sous-espaces vectoriels $W_1, \dots, W_k$ de $\mathbb{R}^n$ stables par M tels que, pour tout i, $\dim W_i \leqslant 2$, et $E = \overset{k}{\underset{i=1}{\perp}} W_i$. On va écrire chaque $M|_{W_i}$ sous une forme adaptée.
Si $\dim W_i = 1$, comme $M|_{W_i}$ est orthogonale, on a $M|_{W_i} = \pm 1$.
Si $\dim W_i = 2$, on a $M|_{W_i} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
En prenant (e_1, e_2) une base orthonormale de W_i, on a $(Me_1, Me_1) = a^2 + b^2 = 1$ et $(Me_2, Me_2) = c^2 + d^2 = 1$.
On peut donc écrire $a = \cos\theta_i$, $b = \sin\theta_i$, $c = \sin\mu_i$ et $d = \cos\mu_i$, avec $\theta_i, \mu_i \in]0;2\pi[$.
Comme $M|_{W_i}$ est orthogonale, on a $\det M = ad - bc = \cos(\theta_i + \mu_i) = \pm 1$.
Si $\det M = 1$, $\mu_i = 2\pi - \theta_i$, donc $M|_{W_i} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{smallmatrix}\right) = R_{-\theta_i}$. Si $\theta_i = \pi$, alors $M|_{W_i} = -I_2$.
Si $\det M = -1$, $\mu_i = \pi - \theta_i$, donc $M|_{W_i} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i \end{smallmatrix}\right) = P \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) P^{-1}$.
On peut donc écrire une matrice semblable à M qui est sous la forme voulue. □

Conclusion. Toute matrice orthogonale est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont I_r, $-I_m$ et des matrices de rotations. ◁

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition
[CG] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet